

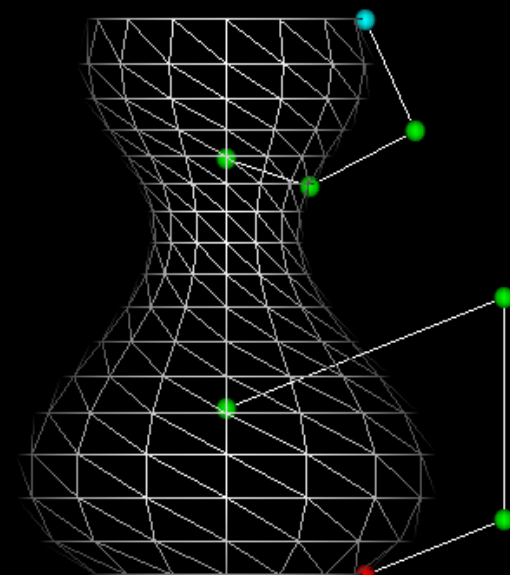


Računarska grafika

predavanja
v.prof.dr. Samir Lemeš
slemes@unze.ba

Parametarske krivulje

- Predstavljjanje krivulja
- Parametarske krivulje
- Parametarske kubne krivulje
- Hermitovi kubni splajnovi
- Hermitove funkcije miješanja



Predstavljanje krivulja

- Složeni geometrijski oblici u vektorskoj grafici se ne mogu uvijek opisati ravnim i kružnim (lučnim) segmentima.



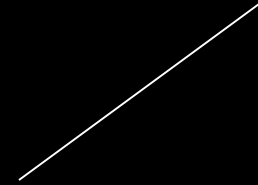
Predstavljanje krivulja

- Pomoću niza tačaka...
 - Krivulja je predstavljena približno, kao izlomljena linija – nije pogodno za glatke linije
 - Teško za manipulaciju jer se sve tačke moraju premještati pojedinačno
- Umjesto toga, krivulja se modelira kao polinom
 - $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$
 - gdje su $x()$, $y()$, $z()$ polinomi, a t je parametar

Polinomi

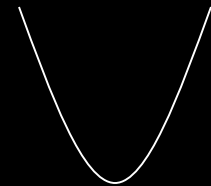
- Linearni:

$$f(t) = at + b$$



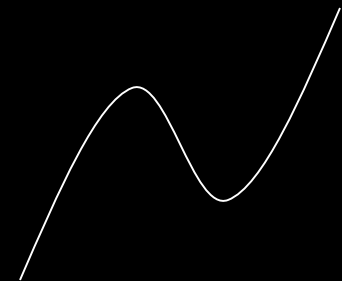
- Kvadratni:

$$f(t) = at^2 + bt + c$$



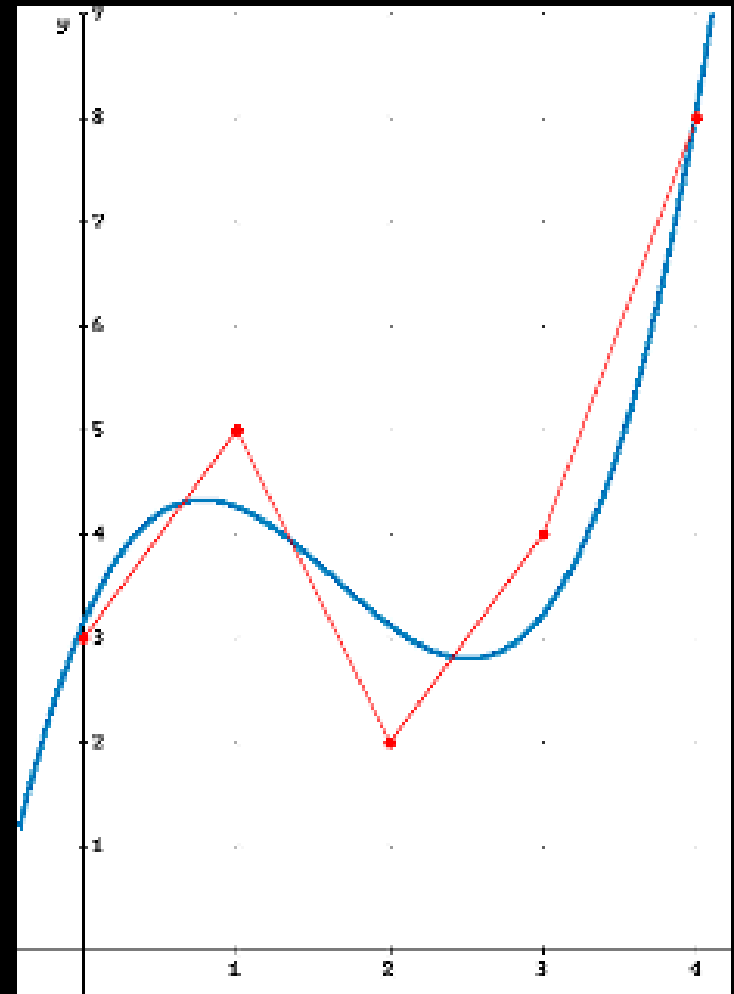
- Kubni:

$$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$



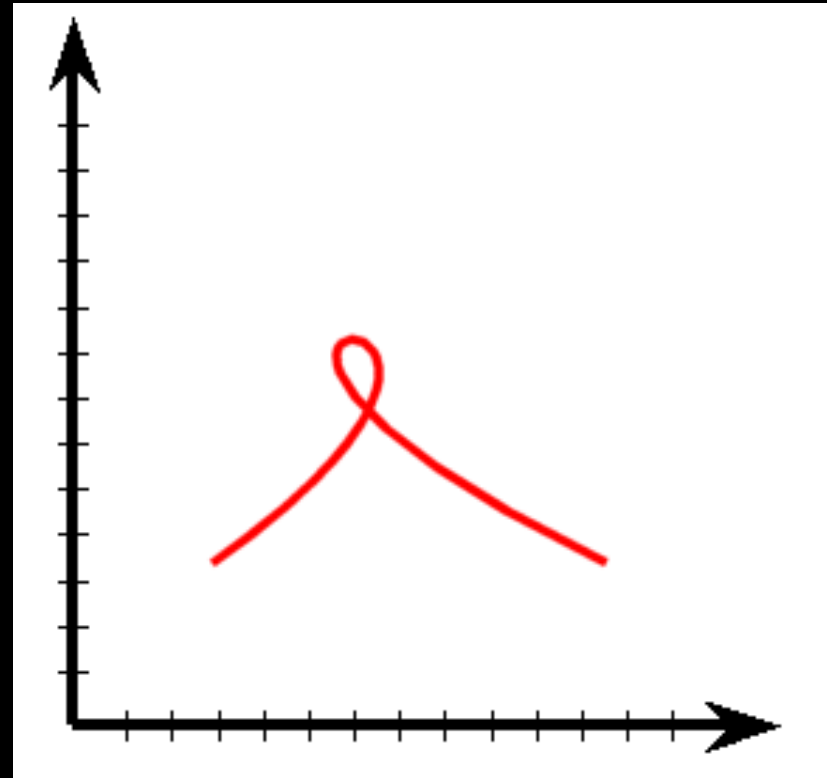
Predstavljanje krivulja

- Kontrolne tačke
 - Set tačaka koje imaju utjecaj na oblik krivulje
- Čvorovi
 - Kontrolne tačke koje leže na krivoj
- Splajnovi za interpolaciju
 - Krivulje koje prolaze kroz kontrolne tačke (čvorove)
- Aproksimativni splajnovi
 - Samo kontrolne tačke utječu na oblik



Parametarske krivulje

- Fleksibilno predstavljanje krivulje
- Ne moraju biti funkcije
 - Mogu imati više vrijednosti u odnosu na bilo koju dimenziju



Kubni polinomi

- $x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$
- $y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$
- $z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$
- Neka je t : $(0 \leq t \leq 1)$
- Ako se uvede oznaka
 $T = [t^3 \ t^2 \ t \ 1]$
- Matrica koeficijenata C
- Krivulja: $Q(t) = T \cdot C$

$$\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

Parametarske krive

- Kako odrediti tangentu na krivulju?

- Ako je $f(x) = f(x) = x^2 - 4$

- tangenta za $(x=3)$ je $f'(x) = 2x - 4 = 2(3) - 4$

$$\frac{d}{dt}Q(t) = Q'(t) = \frac{d}{dt}T\dot{C} = [3t^2 \quad 2t \quad 1 \quad 0]\dot{C}$$

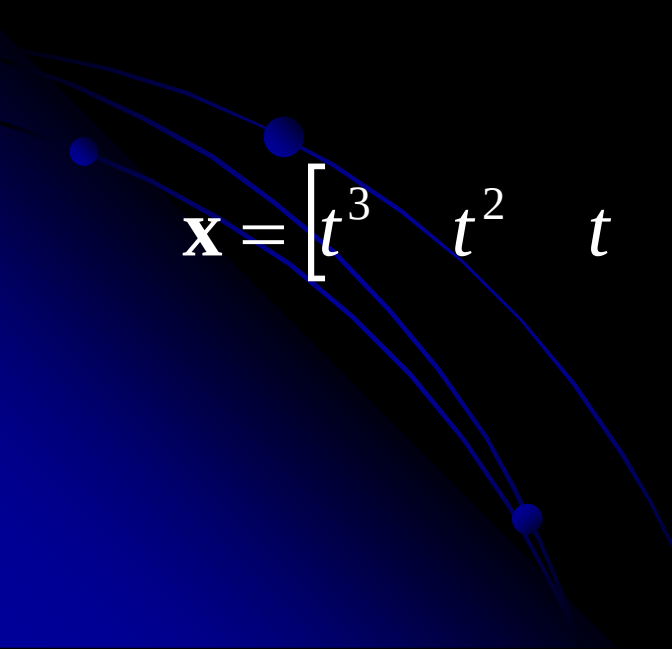
- Izvod od $Q(t)$ je vektor tangente u t :

$$\frac{d}{dt}Q(t) = Q'(t) = \frac{d}{dt}T \cdot C = [3t^2 \quad 2t \quad 1 \quad 0] \cdot C$$

Izvodi

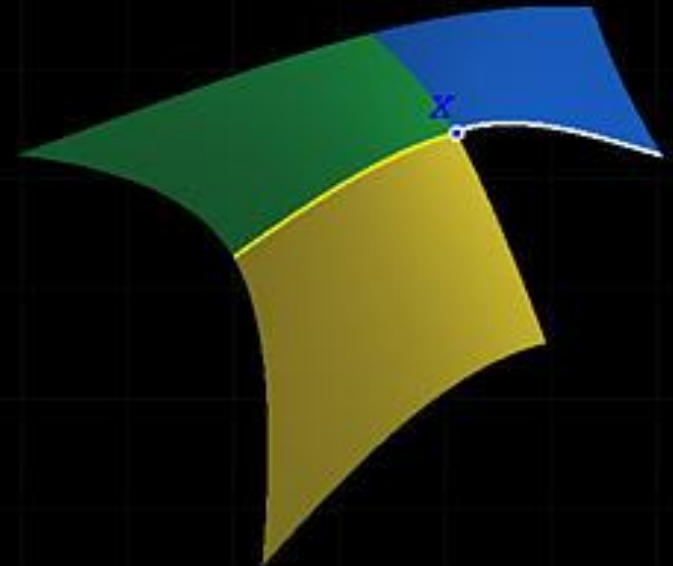
- Određivanje izvoda (tangenti) krivulje:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}t^3 + \mathbf{b}t^2 + \mathbf{c}t + \mathbf{d} \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 3\mathbf{a}t^2 + 2\mathbf{b}t + \mathbf{c}$$


$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

Segmenti krivulje

- Krivulje se konstruišu povezivanjem krajeva više manjih segmenata
 - Moraju postojati pravila o tome kako se vrši povezivanje
- Kontinuitet opisuje vezu
 - Parametarski kontinuitet
 - Geometrijski kontinuitet

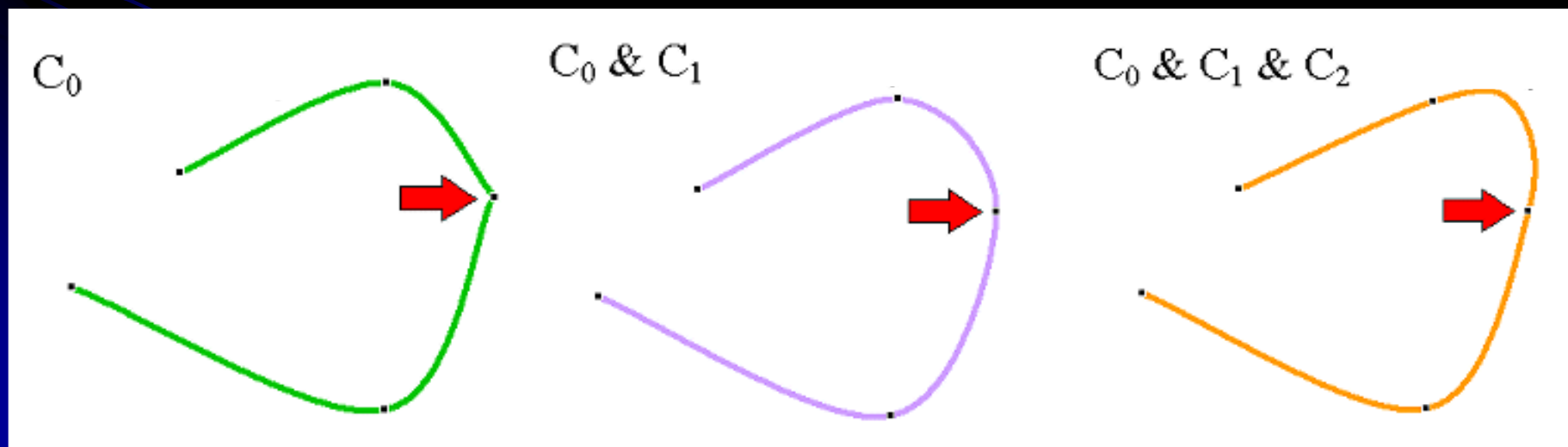


Parametarski kontinuitet

- Parametarski kontinuitet je koncept koji opisuje promjenu vrijednosti parametra duž krivulje
- Može se uporediti s krivuljom koja opisuje kretanje objekta, i u tom slučaju vrijeme predstavlja parametar "t"
- Promjena se opisuje izvodima
- Kontinuitet predstavlja pokazatelj zakrivljenosti krivulje na prelazu segmenata

Parametarski kontinuitet

- C^{-1} : krivulje imaju prekide (diskontinuitete)
- C^0 : krivulje su spojene (imaju zajedničku tačku)
- C^1 : prvi izvodi krivulja su jednaki
- C^2 : prvi i drugi izvodi krivulja su jednaki
- C^n : izvodi od prvog do n-tog su jednaki



Geometrijski kontinuitet

- Geometrijski kontinuitet:
 - G^0 kontinuitet predstavlja neprekidnost krivulje u tački dodira segmenata
 - G^1 kontinuitet podrazumijeva zajednički pravac vektora tangente u tački dodira segmenata.
 - G^2 kontinuitet podrazumijeva da segmenti imaju zajednički centar zakrivljenosti u tački dodira
- Smjer (ne obavezno i intenzitet) tangenti se poklapa, odnosno vrijednosti tangenti na krajevima dva segmenta su proporcionalne (G^2 kontinuitet znači simetrične tangente)

Parametarske kubne krivulje

- Da bi se osigurao C_2 kontinuitet, krivulje moraju biti najmanje trećeg reda
- Data je parametarska definicija kubnog splajna (3. reda) u dvije dimenzije
- Kako je proširiti na tri dimenzije?

$$x = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

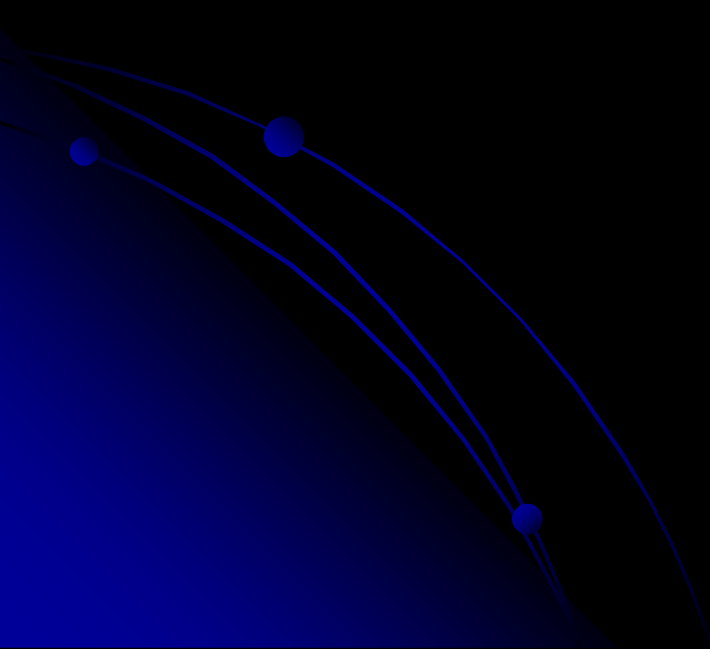
$$y = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$

Parametarske kubne krivulje

- Može se predstaviti i u matričnom obliku

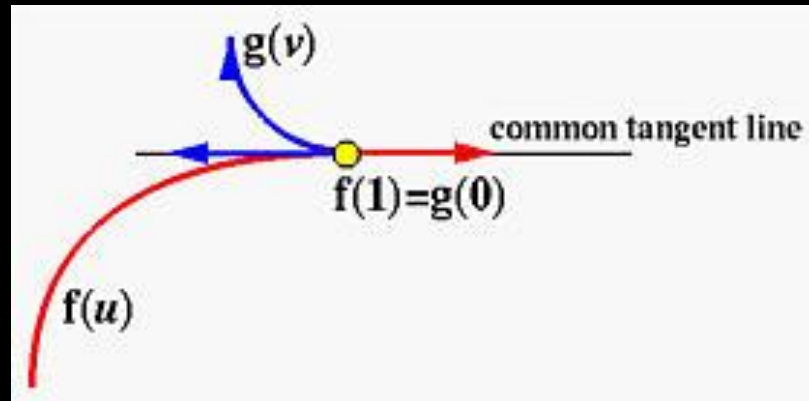
$$x = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$


$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \\ c_x & c_y \\ d_x & d_y \end{bmatrix}$$

Koeficijenti

- Kako izabrati koeficijente?
 - $[a_x \ b_x \ c_x \ d_x]$ i $[a_y \ b_y \ c_y \ d_y]$ moraju zadovoljiti ograničenja koja nameću čvorovi i uslovi kontinuiteta



Parametarske krivulje

- Krivulju je teško konceptualizirati kao $x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$

(Crtači ne razmišljaju o koeficijentima ili kubnim jednačinama)

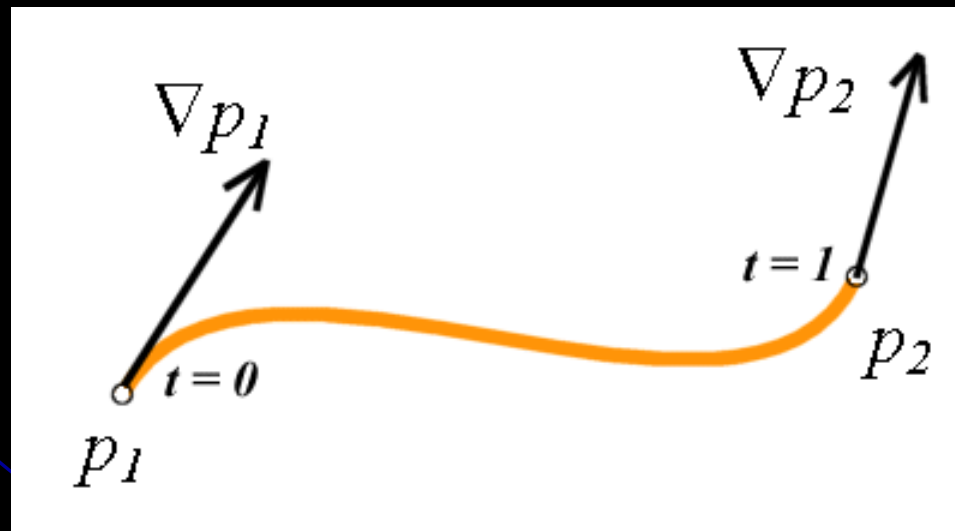
- Umjesto toga, krivulja se definiše kao kombinacija 4 precizno definisana kubna polinoma
- Svaki tip krivulje definiše različite kubne polinome

Parametarske krivulje

- **Hermitove** - dvije krajnje tačke i dva vektora tangenti u krajevima
- **Bezier** - dvije krajnje tačke i dvije druge tačke koje definišu vektore tangenti u krajevima
- **Splajnovi** - četiri kontrolne tačke
 - C_1 i C_2 kontinuitet u tačkama dodira
 - Približavaju se svojim kontrolnim tačkama, ali ih ne moraju uvijek dodirnuti

Hermitovi kubni splajnovi

- Primjer čvorova i kontinuiteta



Hermitovi kubni splajnovi

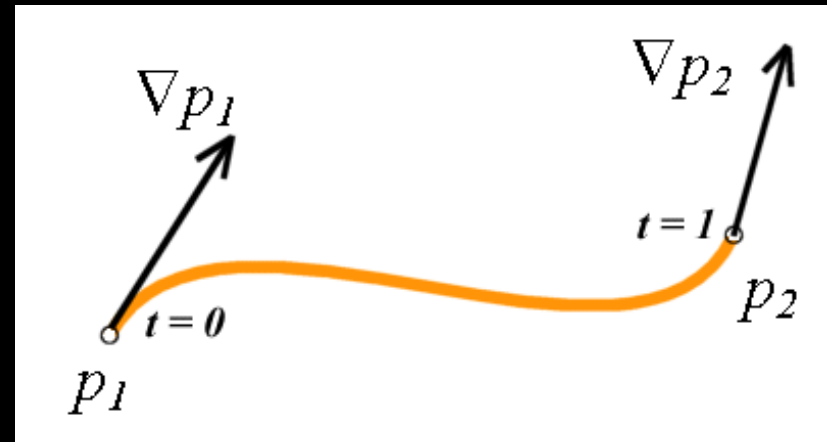
- Po jedna kubna krivulja za svaku dimenziju
- Krivulja u x/y ravni ima dvije krivulje:

$$\begin{aligned} f_x(t) &= at^3 + bt^2 + ct + d \\ &= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(t) &= et^3 + ft^2 + gt + h \\ &= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hermitovi kubni splajnovi

- 2-D Hermitov kubni splajn je definisan sa 8 parametara: a, b, c, d, e, f, g, h
- Kako se intuitivne krajnje tačke pretvaraju u ovih 8 (relativno) neintuitivnih parametara?
- Poznato je:
 - (x, y) položaj za $t = 0, p_1$
 - (x, y) položaj za $t = 1, p_2$
 - (x, y) izvod za $t = 0, dp/dt$
 - (x, y) izvod za $t = 1, dp/dt$



Hermitovi kubni splajnovi

- Poznat je:
 - (x, y) položaj za $t = 0$, p_1

$$\begin{aligned} f_x(0) &= a0^3 + b0^2 + c0 + d \\ &= \begin{bmatrix} 0^3 & 0^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$f_x(0) = d = p_{1_x}$$

$$\begin{aligned} f_y(0) &= e0^3 + f0^2 + g0 + h \\ &= \begin{bmatrix} 0^3 & 0^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$f_y(0) = h = p_{1_y}$$

Hermitovi kubni splajnovi

- Poznat je:
 - (x, y) položaj za $t = 1, p_2$

$$\begin{aligned} f_x(1) &= a1^3 + b1^2 + c1 + d \\ &= \begin{bmatrix} 1^3 & 1^2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$f_x(1) = a + b + c + d = p_{2_x}$$

$$\begin{aligned} f_y(1) &= e1^3 + f1^2 + g1 + h \\ &= \begin{bmatrix} 1^3 & 1^2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$f_y(1) = e + f + g + h = p_{2_y}$$

Hermitovi kubni splajnovi

- Za sad imamo 4 jednačine, ali 8 nepoznatih
- Koriste se izvodi:

$$f_x(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$f'_x(t) = 3at^2 + 2bt + c$$

$$f'_x(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$f_y(t) = et^3 + ft^2 + gt + h$$

$$f'_y(t) = 3et^2 + 2ft + g$$

$$f'_y(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

Hermitovi kubni splajnovi

- Poznat je:
 - (x, y) izvod za $t = 0$, dp/dt

$$\begin{aligned} f'_x(0) &= 3a0^2 + 2b0 + c \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 0^2 & 2 \cdot 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$f'_x(0) = c = \frac{dp_{1_x}}{dt}$$

$$\begin{aligned} f'_y(0) &= 3e0^2 + 2f0 + g \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 0^2 & 2 \cdot 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$f'_y(0) = g = \frac{dp_{1_y}}{dt}$$

Hermitovi kubni splajnovi

- Poznat je:
 - (x, y) izvod za $t = 1$, dp/dt

$$\begin{aligned} f'_x(1) &= 3a1^2 + 2b1 + c \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1^2 & 2 \cdot 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$f'_x(1) = 3a + 2b + c = \frac{dp_{1_x}}{dt}$$

$$\begin{aligned} f'_y(1) &= 3e1^2 + 2f1 + g \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1^2 & 2 \cdot 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$f'_y(1) = 3e + 2f + g = \frac{dp_{1_y}}{dt}$$

Hermitova specifikacija

- Matrična jednačina za Hermitovu krivulju

$$\begin{array}{c}
 p_1 \\
 p_2 \\
 r \ p_1 \\
 r \ p_2
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 t^3 & t^2 & t^1 & t^0
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 3 & 2 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a & e \\
 b & f \\
 c & g \\
 d & h
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 p_{1_x} & p_{1_y} \\
 p_{2_x} & p_{2_y} \\
 \frac{dp_{1_x}}{dt} & \frac{dp_{1_y}}{dt} \\
 \frac{dp_{1_x}}{dt} & \frac{dp_{2_y}}{dt}
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 t = 0 \\
 t = 1 \\
 t = 0 \\
 t = 1
 \end{array}$$

Rješavanje Hermitove matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_{1_x} & p_{1_y} \\ p_{2_x} & p_{2_y} \\ \frac{dp_{1_x}}{dt} & \frac{dp_{1_y}}{dt} \\ \frac{dp_{1_x}}{dt} & \frac{dp_{2_y}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \\ d & h \end{bmatrix}$$

Matrice splajna i geometrije

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1_x} & p_{1_y} \\ p_{2_x} & p_{2_y} \\ \frac{dp_{1_x}}{dt} & \frac{dp_{1_y}}{dt} \\ \frac{dp_{1_x}}{dt} & \frac{dp_{2_y}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \\ d & h \end{bmatrix}$$

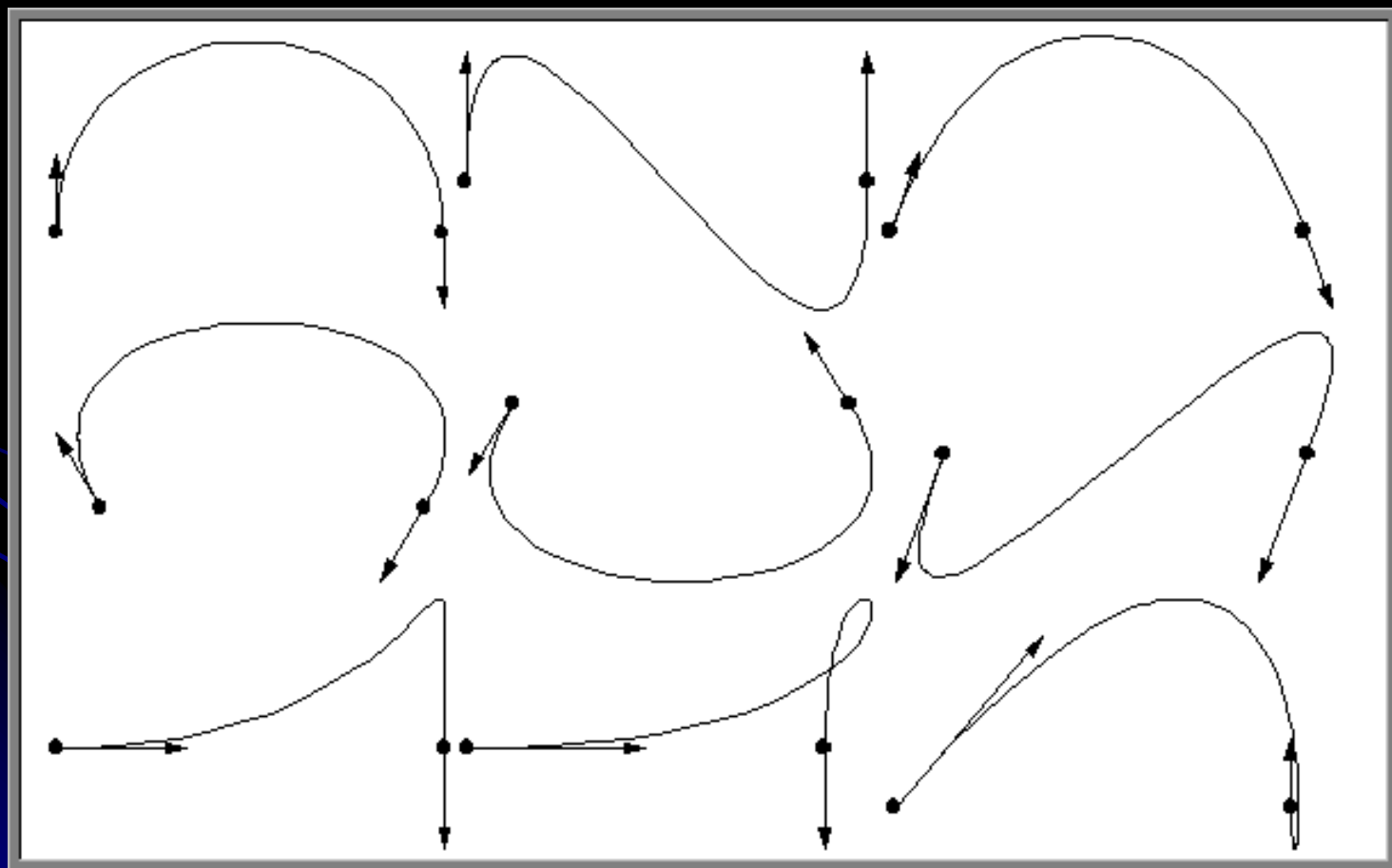
M_{Hermite}

G_{Hermite}

Rezultujuća jednačina Hermitovog splajna

$$[x \quad y] = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{Hermite}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} & \frac{dy_2}{dt} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_{Hermite}}$$

Primjeri Hermitovih krivulja



Funkcije miješanja (Blending Functions)

- Množenjem prve dvije matrice u donjoj lijevoj jednačini, dobiju se 4 funkcije od 't' koje miješaju 4 kontrolna parametra
- To su funkcije miješanja

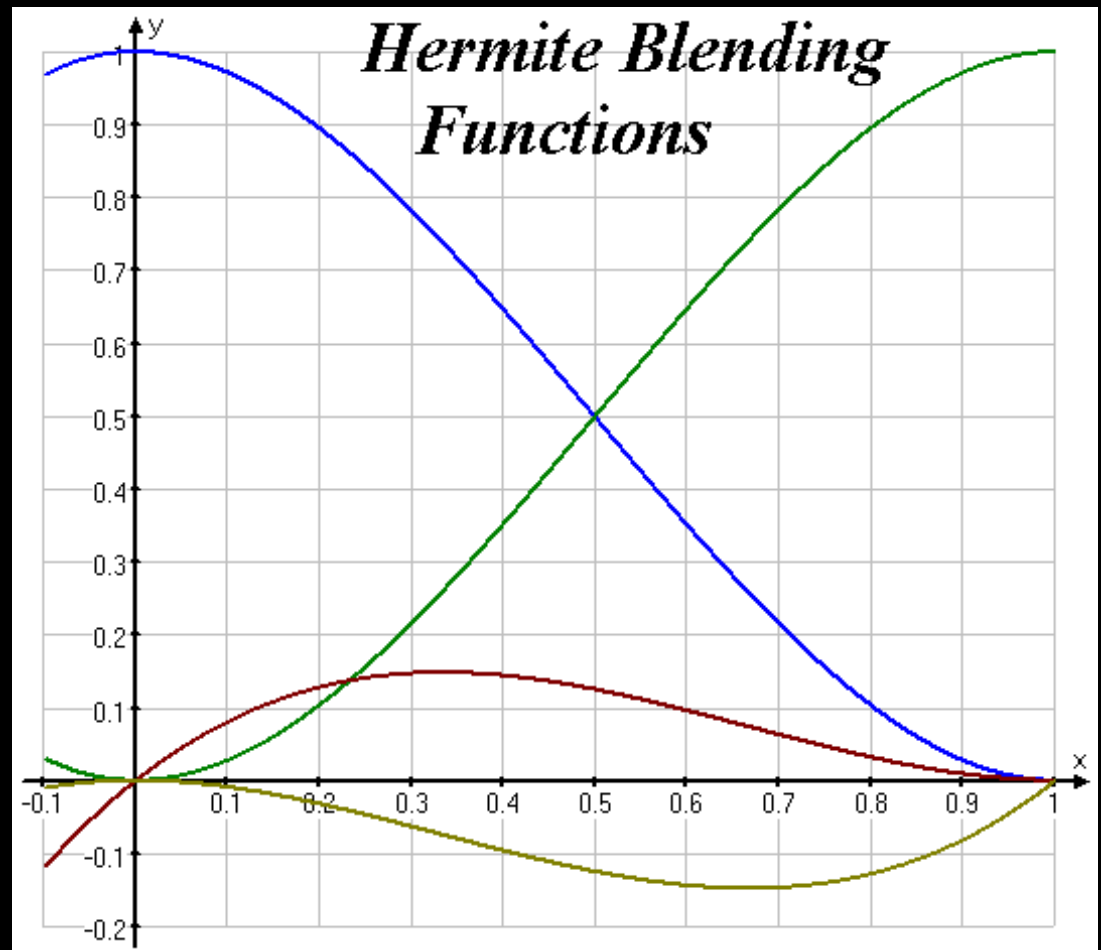
$$[x \ y] = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} & \frac{dy_2}{dt} \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_{Hermite}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} & \frac{dy_2}{dt} \end{bmatrix}}_{G_{Hermite}}$

$$p(t) = \begin{bmatrix} 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ -2t^3 + 3t^2 \\ t^3 - 2t^2 + t \\ t^3 - t^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \nabla p_1 \\ \nabla p_2 \end{bmatrix}$$

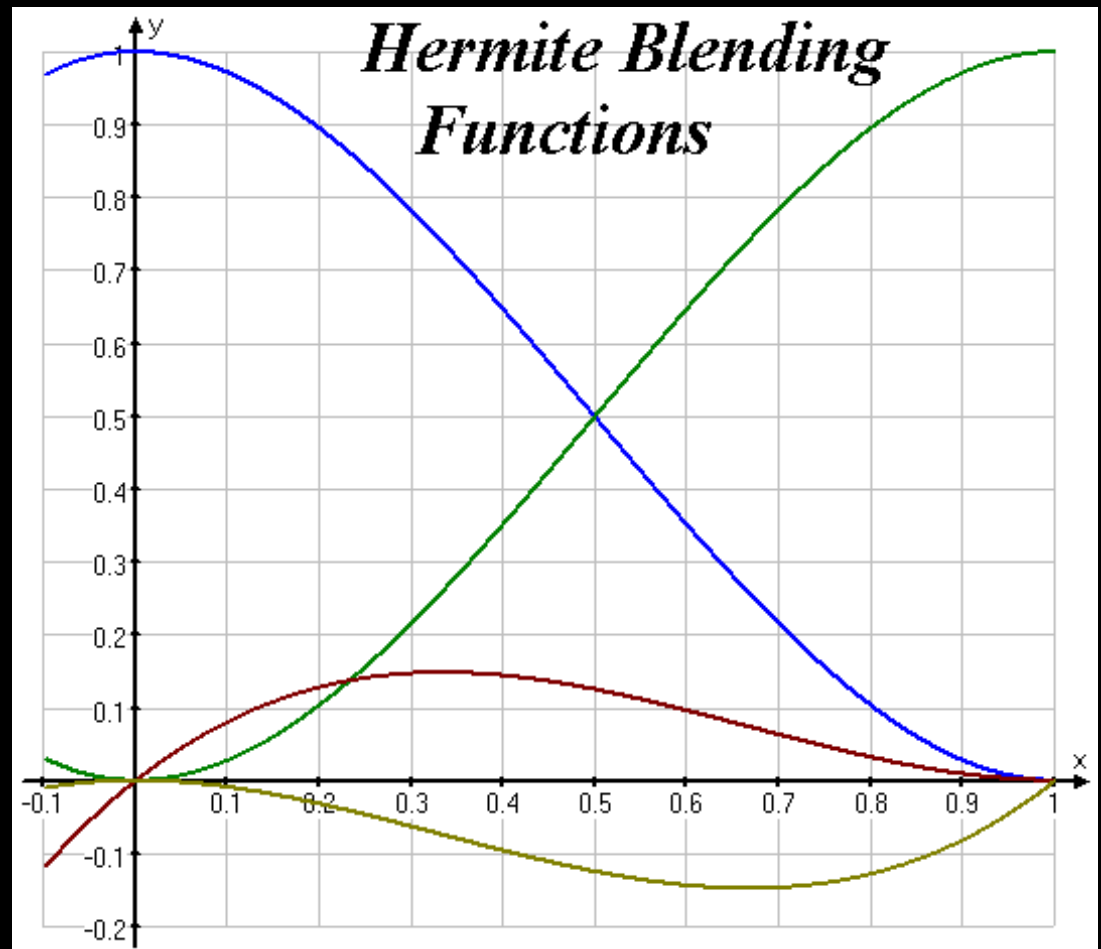
Hermitove funkcije miješanja

- Grafička zavisnost funkcije miješanja od parametra 't'



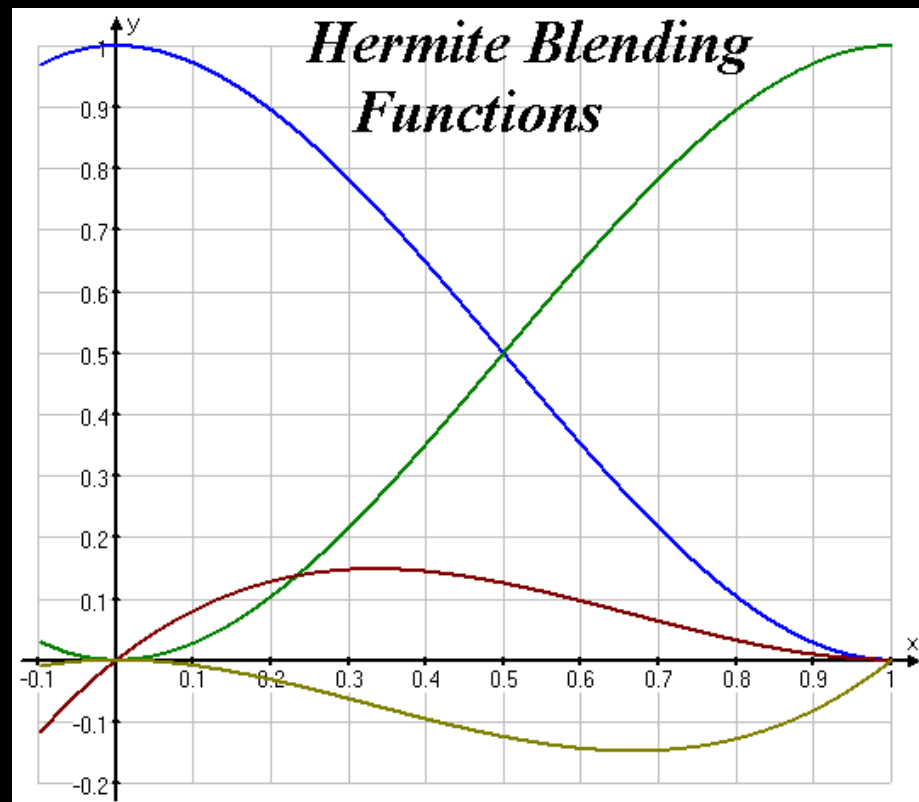
Hermitove funkcije miješanja

- Svaka funkcija miješanja reflektuje utjecaj P_1 , P_2 , ΔP_1 , ΔP_2 na oblik splajna



Hermitove funkcije miješanja

- Funkcije miješanja se koriste za interpolaciju krivulja.
- Svaka interpolirana tačka je linearna kombinacija ove 4 funkcije miješanja.



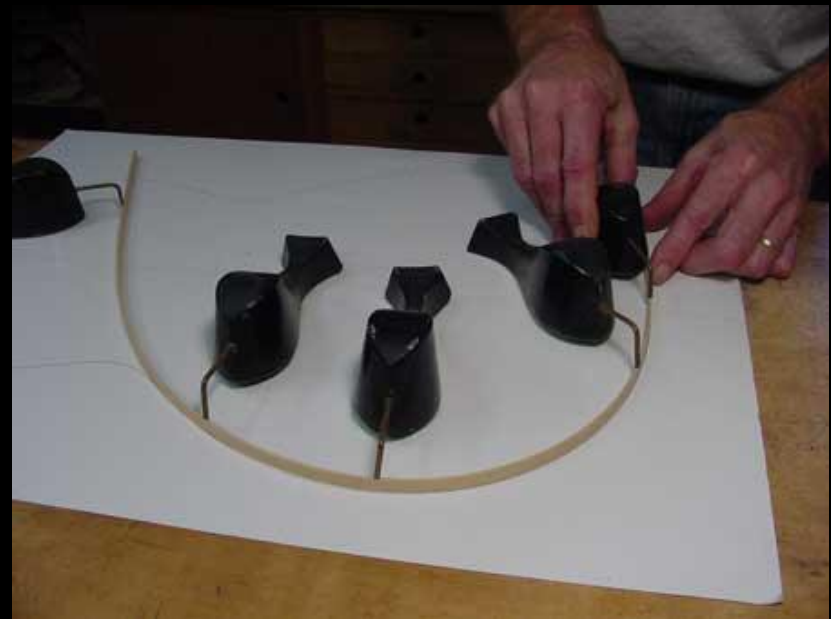
Parametarske krive

- Bézier krivulje
- Bézier funkcije miješanja
- Uniformni B-splajnovi
- NeUniformni, Racionalni B-Splajnovi (NURBS)
- Konverzija između splajnova
- Rasterizacija splajnova



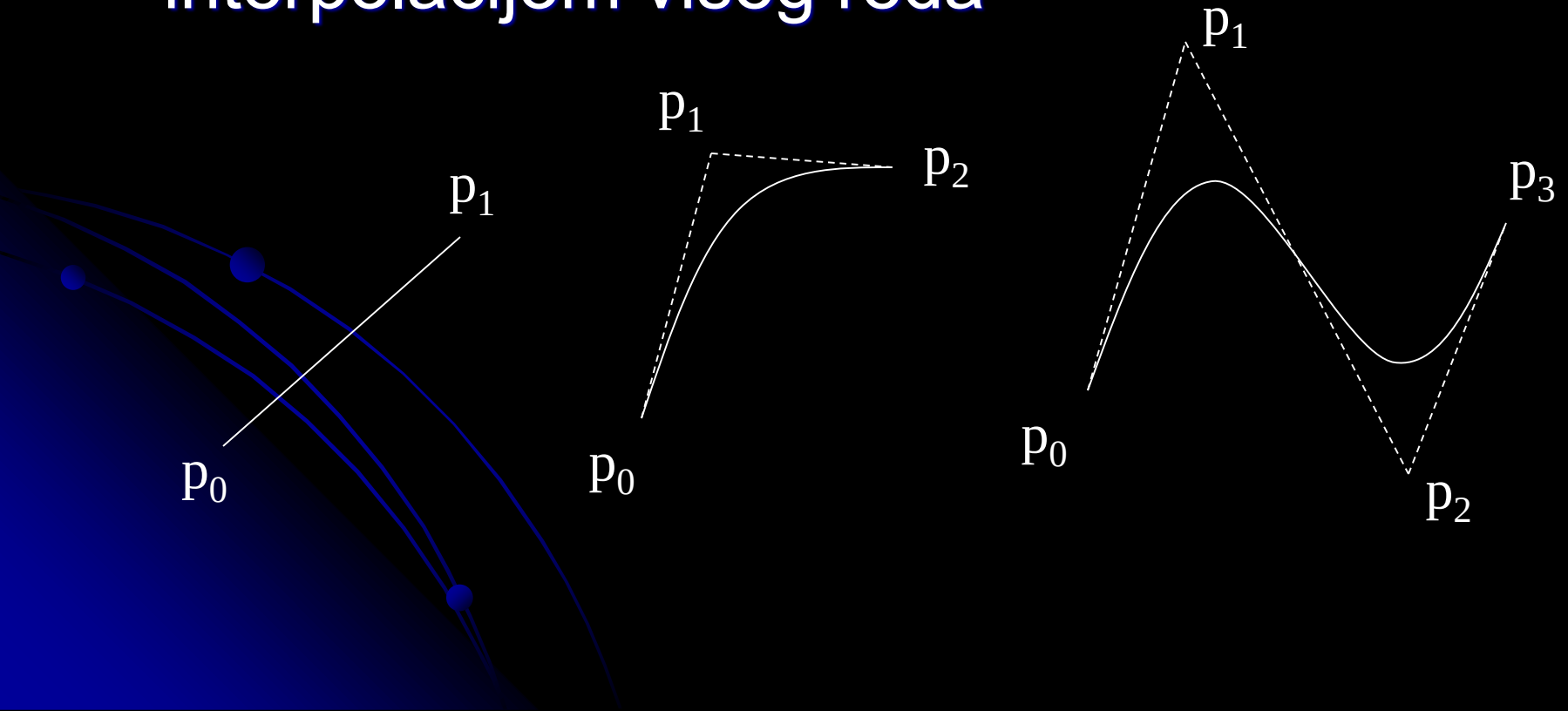
Splajnovi - historija

- Kontinuirane krivulje (*splines*) koje prolaze kroz zadane kontrolne tačke
- Kontinuitet drugog reda (zajedničke tačke, tangente (prvi) i drugi izvodi



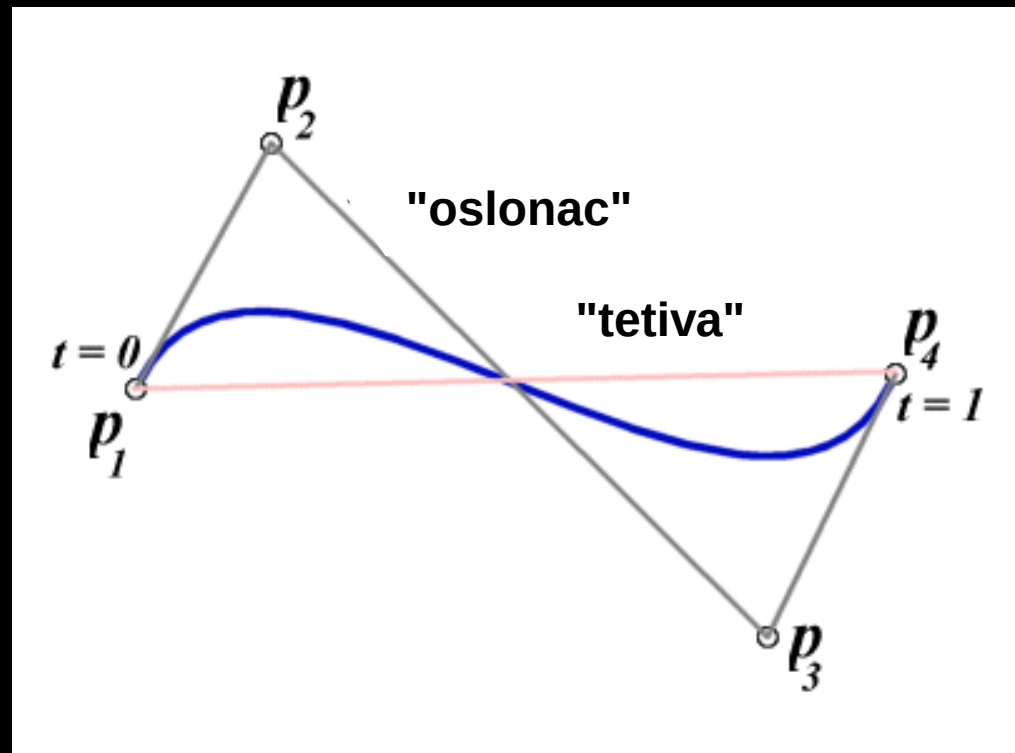
Bézier krivulje

- Bézier krivulje se mogu posmatrati kao proširenje linearne interpolacije interpolacijom višeg reda



Bézier krivulje

- Slične Hermitovim, ali imaju intuitivniju definiciju izvoda krajnjih tačaka
- Četiri kontrolne tačke, od kojih su dvije čvorovi



Bézier krivulje

- Vrijednosti izvoda Bezier krivulje u čvorovima zavise od susjednih tačaka

$$\nabla p_1 = 3(p_2 - p_1)$$

$$\nabla p_4 = 3(p_4 - p_3)$$

- Skalar 3 je izabran samo za ovu krivu, kao primjer, može imati bilo koju vrijednost.

Osnovna matrica Bézier krivulje

- Matrična forma

$$\begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \\ c_x & c_y \\ d_x & d_y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{\text{Bezier}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_{\text{Bezier}}}$$

- $\mathbf{M}_{\text{Bezier}}$ je dobra osnovna matrica jer ima dosta 0.

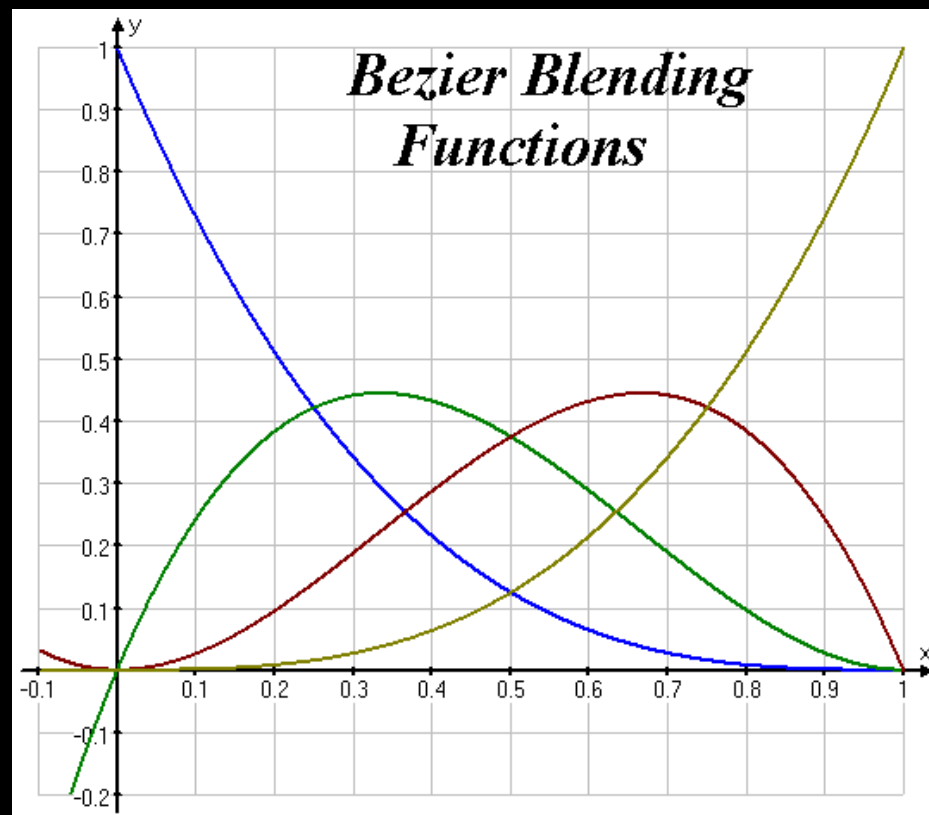
Bézier funkcije miješanja

- Funkcija miješanja definiše utjecaj kontrolne tačke na svaku tačku krivulje.
- Vrijednost 0 znači da kontrolna tačka nema utjecaja na tačku krivulje.
- Ako funkcija miješanja ima vrijednost 1, krivulja siječe kontrolnu tačku.
- Ova familija polinoma se naziva Bernstein polinomima 3. reda
 - $C(3, k) t^k (1-t)^{3-k}$; $0 \leq k \leq 3$
 - Svi su pozitivni na intervalu $[0,1]$
 - Njihov zbir iznosi 1

$$p(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 \\ 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

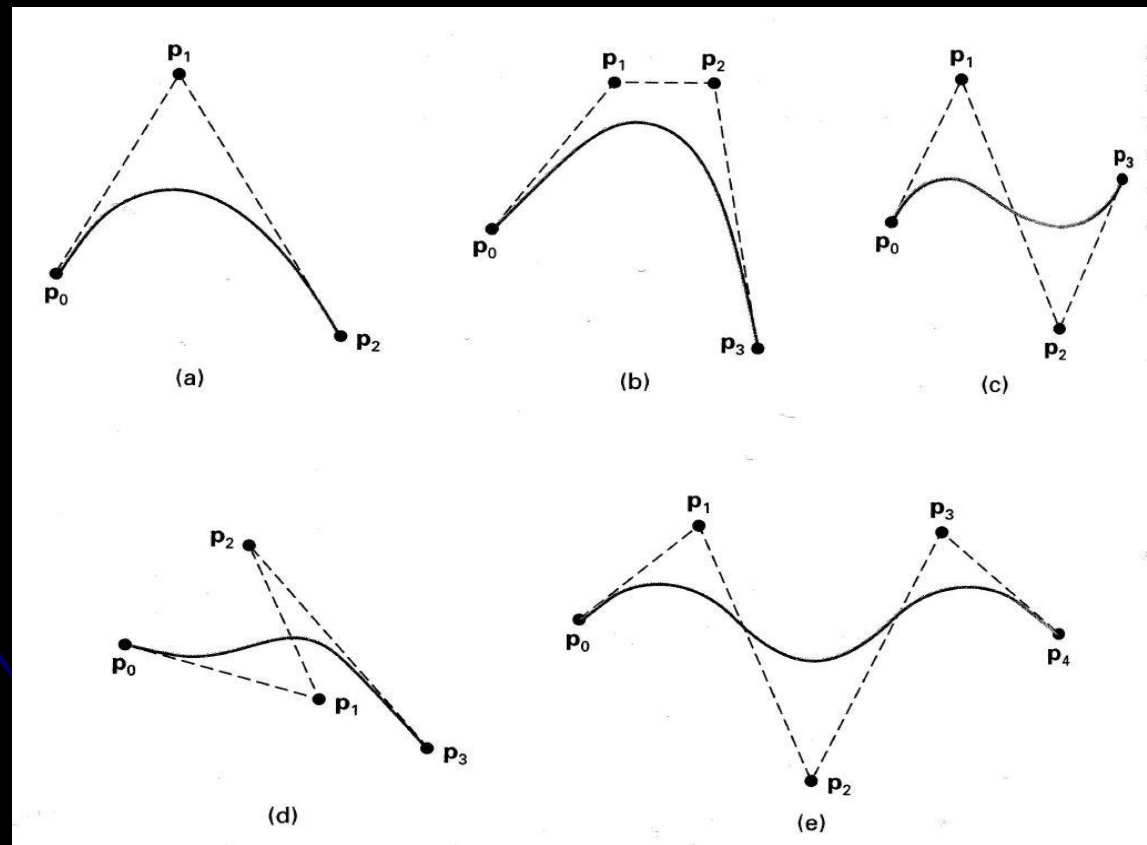
Bézier funkcije miješanja

- Svaka tačka na krivoj je linearna kombinacija kontrolnih tačaka
- Sve vrijednosti kombinacija su pozitivne
- Zbir vrijednosti je 1
- Krivulja je konveksna kombinacija kontrolnih tačaka

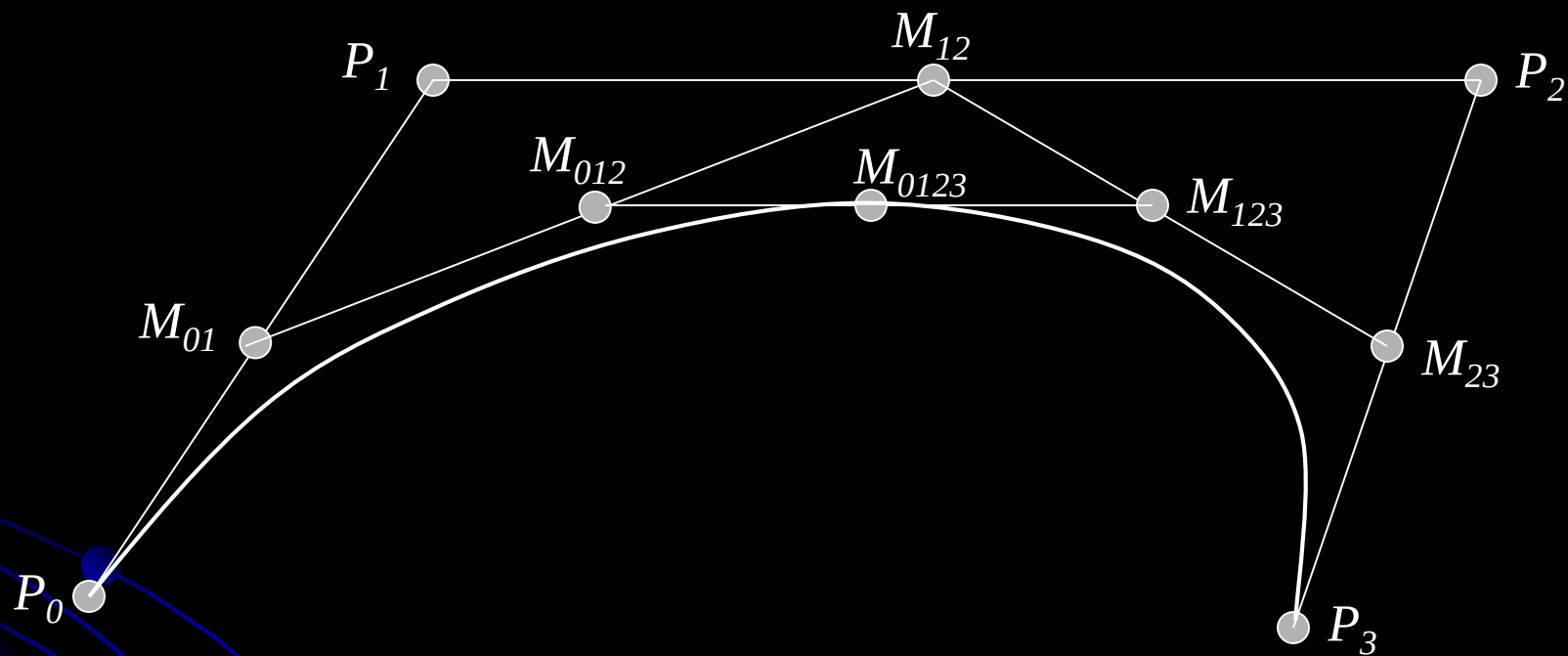


Konveksna kombinacija kontrolnih tačaka

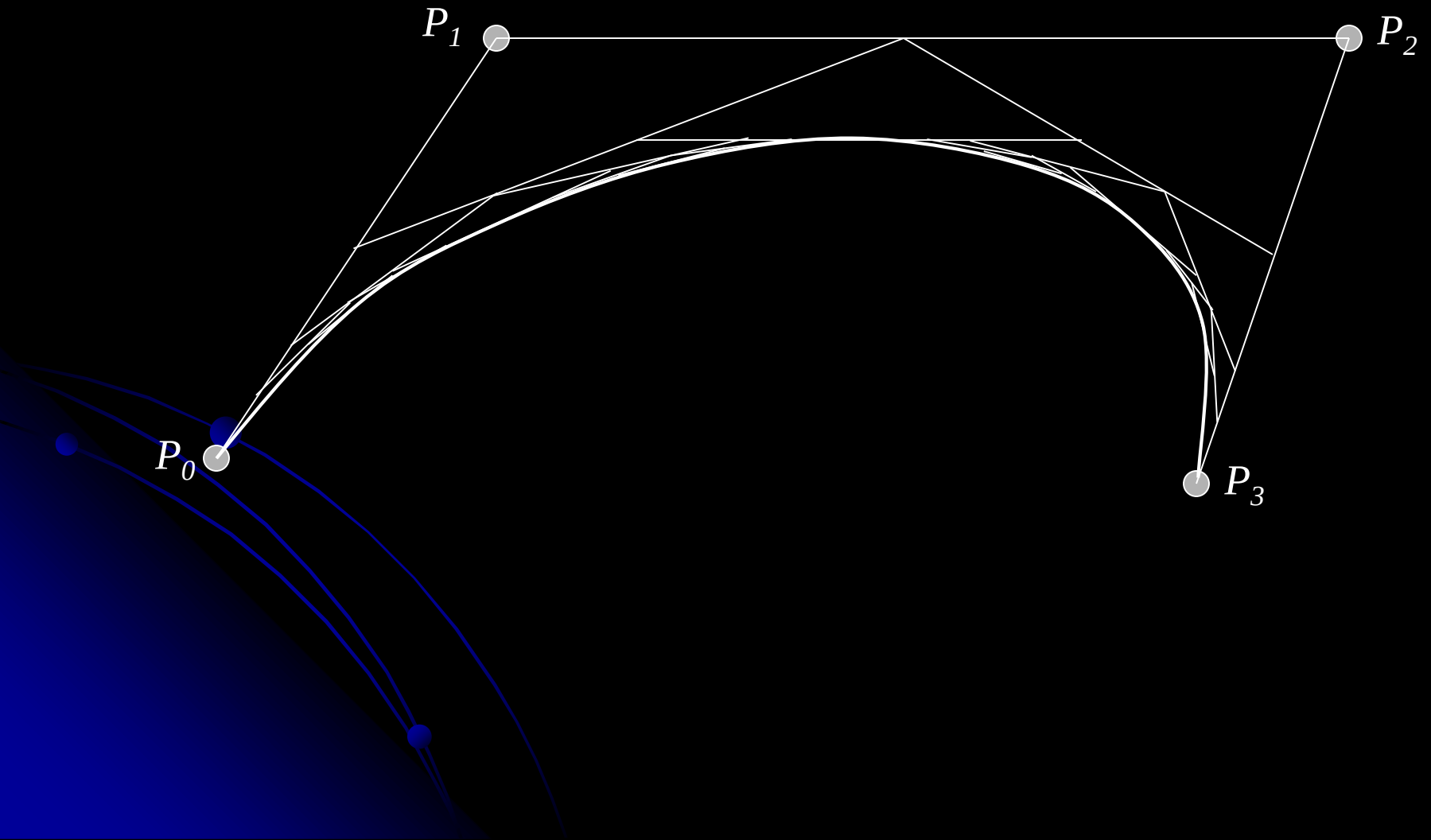
- Uvijek ostaje unutar graničnog regiona (konveksna ljuska) definisanog kontrolnim tačkama



Podjela Bézier krivulja

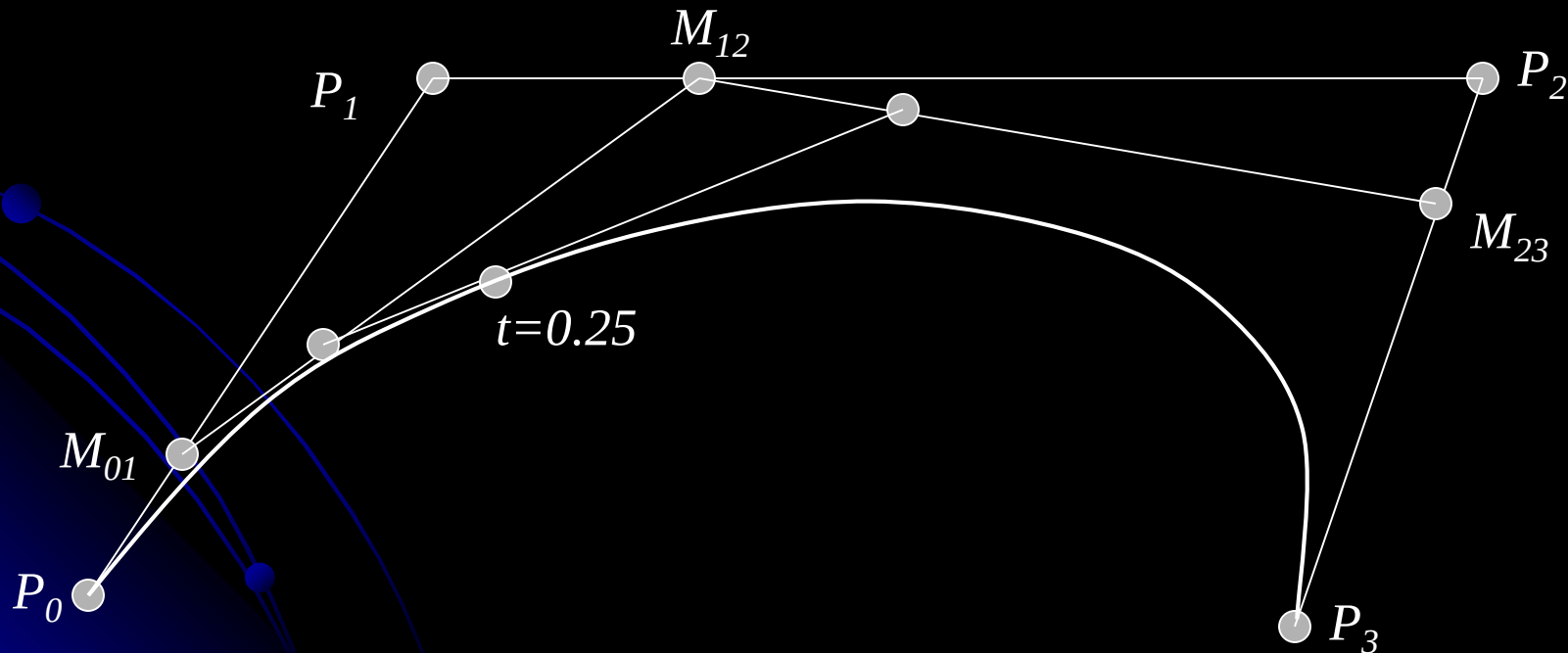


Podjela Bézier krivulja



de Casteljjev algoritam

- Može se naći tačka na Bézier krivulji za svaku vrijednost parametra t sličnim algoritmom
- Ako se npr. želi $t=0.25$, umjesto da se uzmu srednje tačke, uzimaju se tačke na 0.25 dužine

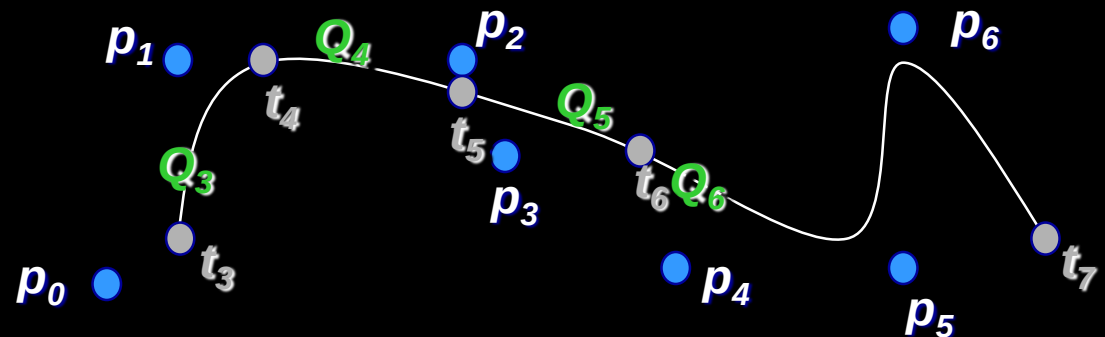


Zašto je potrebno još vrsta splajnova?

- Bézier i Hermitovi splajnovi imaju globalni utjecaj
 - Može se kreirati Bézier krivulja kojoj je trebalo 15 tačaka za definisanje krivulje...
 - Pomjeranjem jedne kontrolne tačke utječe se na cijelu krivulju
 - Kod diskontinuiranih Bézier ili Hermitovih krivulja se to ne dešava, ali zato kod njih nema obaveznog kontinuiteta izvoda u tačkama dodira
- **B-splajnovi** se sastoje od zakrivljenih segmenata čiji koeficijenti polinoma zavise samo od nekoliko kontrolnih tačaka
 - Lokalna kontrola

B-Splajn krive (kubne periodične)

- Polazi se od niza kontrolnih tačaka
- Izaberu se 4 tačke od sredine niza
($p_{i-2}, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}$) d
 - Bézier i Hermite idu između p_{i-2} i p_{i+1}
 - B-Splajn ne interpolira (ne dodiruje) nijednu od njih ali aproksimira prolazeći kroz p_{i-1} i p_i



Uniformni B-splajnovi

- **Aproksimirajući** splajnovi
- Aproksimiraju $n+1$ kontrolnih tačaka
 - $P_0, P_1, \dots, P_n, n \geq 3$
- Krivulja se sastoji od $n-2$ segmenata kubnih polinoma
 - $Q_3, Q_4, \dots, Q_n$
- t se mijenja duž B-splajna kao $Q_i: t_i \leq t < t_{i+1}$
- t_i (i = cijeli broj) su **čvorne tačke** koje spajaju segment Q_i sa segmentom Q_{i+1}
- Kriva je **uniformna** jer se čvorovi nalaze na jednakim intervalima parametra t

Uniformni B-splajnovi

- Prvi segment krivulje, Q_3 , je definisan pomoću prve 4 kontrolne tačke
- Posljednji segment krivulje, Q_m , je definisan pomoću posljednje 4 kontrolne tačke, P_{m-3} , P_{m-2} , P_{m-1} , P_m
- Svaka kontrolna tačka utječe na 4 segmenta krivulje

Osnovna matrica B-splajna

- Formulirati 16 jednačina da se nađe 16 nepoznatih
- 16 jednačina forsiraju C_0 , C_1 , i C_2 kontinuitet između susjednih segmenata Q

$$M_{B-spline} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

B-splajn

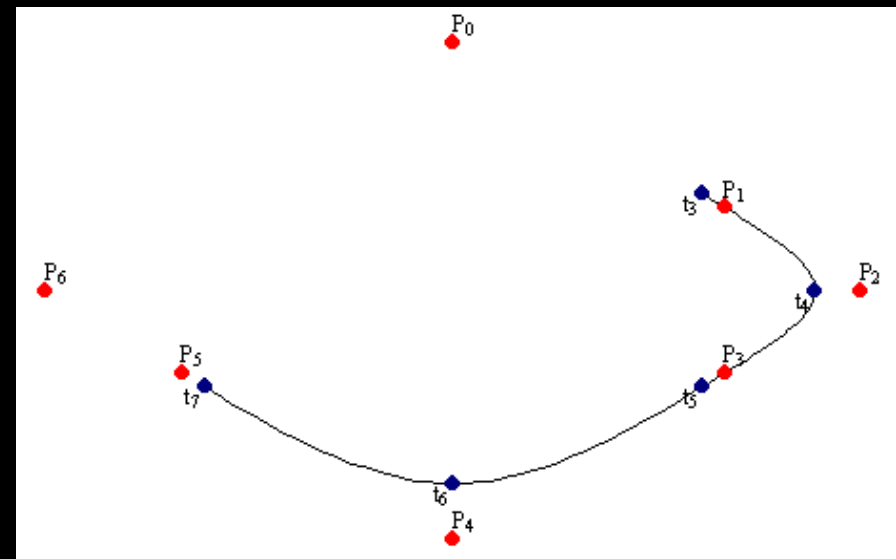
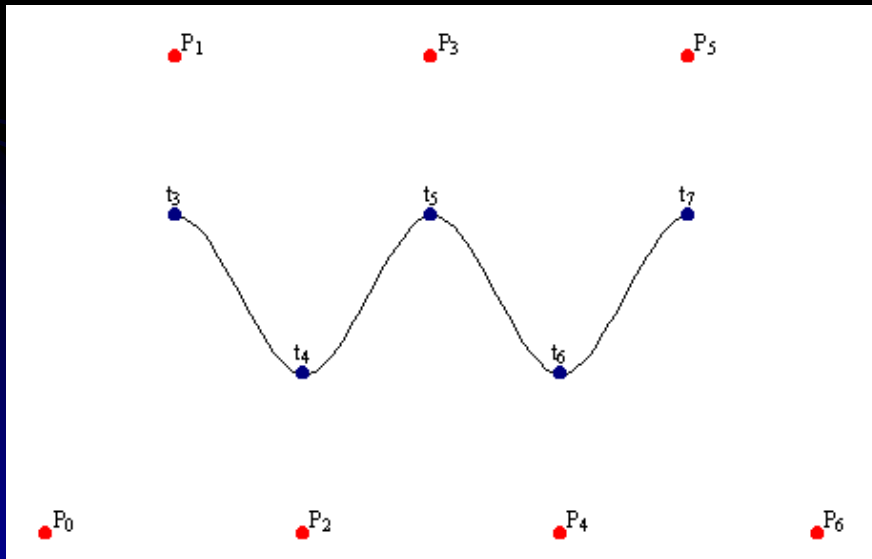
- Tačke duž B-splajna se izračunavaju kao i kod Bézier krivulje

$$Q_i(t) = UM_{B-Spline}P$$

$$Q_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ p_{i+1} \\ p_{i+2} \\ p_{i+3} \end{bmatrix}$$

B-splajn

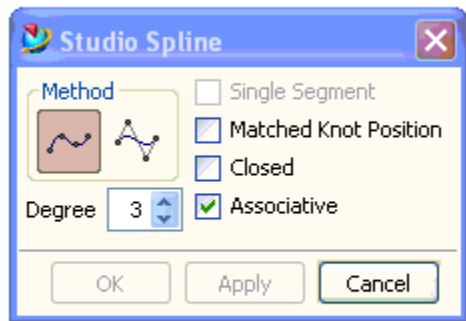
- Zasad je ovo najpopularniji splajn koji se koristi
- C_0 , C_1 , i C_2 kontinuitet



NeUniformni, Racionalni B-Splajnovi (NURBS)

- Osnovni element geometrije u 3D programu Maya
- Modeli se sastoje od površina definisanih pomoću NURBS-a, a ne poligona
- NURBS su glatki
- NURBS zahtijevaju poseban napor da bi se postiglo da ne budu glatki

NeUniformni, Racionalni B-Splajnovi (NURBS)



Konverzija između splajnova

- Posmatraju se dvije osnovne formulacije splajnova za dvije vrste splajnova

$$P = T \times M_{spline_1} \times G_{spline_1}$$

$$P = T \times M_{spline_2} \times G_{spline_2}$$

$$T \times M_{spline_1} \times G_{spline_1} = T \times M_{spline_2} \times G_{spline_2}$$

Konverzija između splajnova

- Moguće je transformisati kontrolne tačke iz jedne osnove splajna u drugu

$$P = T \times M_{spline_1} \times G_{spline_1}$$

$$P = T \times M_{spline_2} \times G_{spline_2}$$

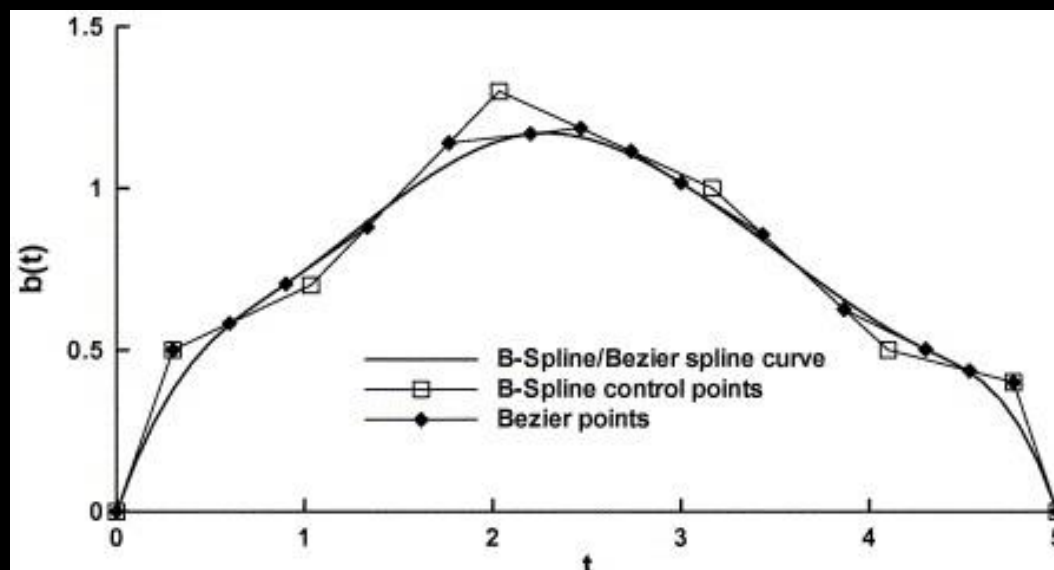
$$T \times M_{spline_1} \times G_{spline_1} = T \times M_{spline_2} \times G_{spline_2}$$

$$M_{spline_1} \times G_{spline_1} = M_{spline_2} \times G_{spline_2}$$

$$G_{spline_1} = M_{spline_1}^{-1} \times M_{spline_2} \times G_{spline_2}$$

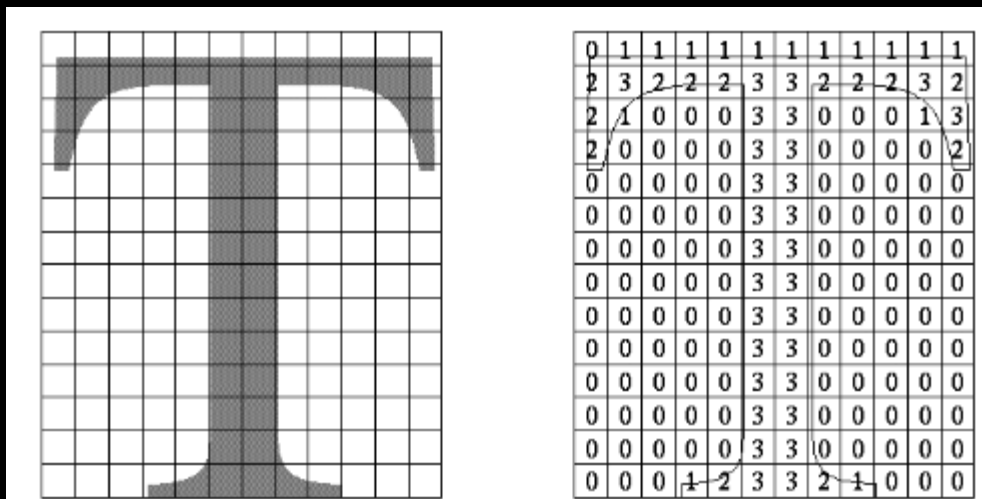
Konverzija između splajnova

- Ovom konverzijom, može se konvertovati B-splajn u Bézier splajn
- Bézier splajnovi su lakši za rasterizaciju (renderovanje) od B-splajnova



Rasterizacija splajnova

- Hornerov metod
- Inkrementalni metod (*Forward Difference*)
- Metod podjele na podsegmente

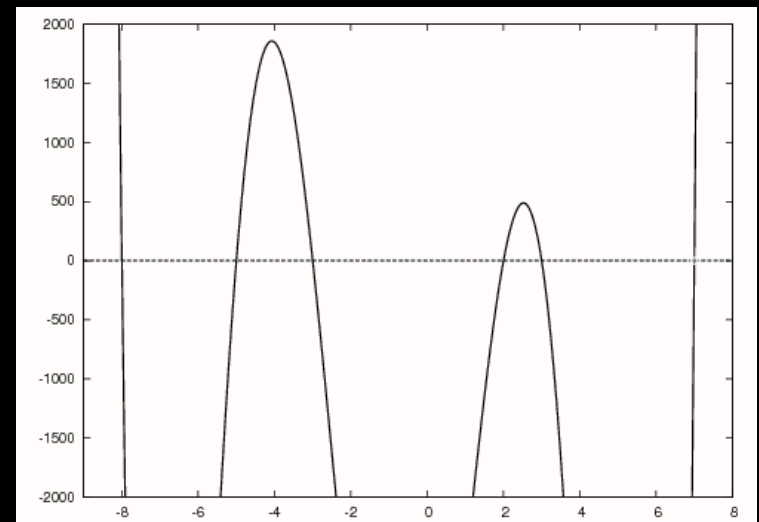


Hornerov metod

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$x(t) = [(a_x t + b_x)t + c_x]t + d_x$$

- Numerički metod za približno računanje korijena polinoma.
- Tri množenja
- Tri sabiranja



Forward Difference

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{a}_x t^3 + \mathbf{b}_x t^2 + \mathbf{c}_x t + \mathbf{d}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{a}_x (t_k + \delta)^3 + \mathbf{b}_x (t_k + \delta)^2 + \mathbf{c}_x (t_k + \delta) + \mathbf{d}_x$$

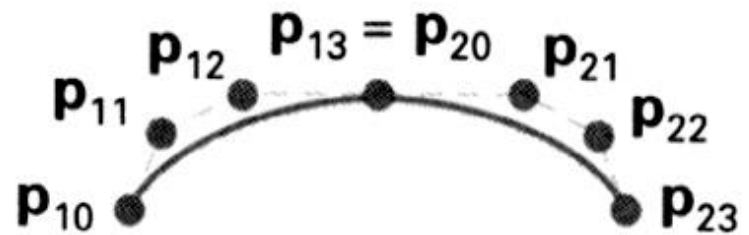
$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k = \Delta \mathbf{x}_k = 3\mathbf{a}_x \delta t_k^2 + (3\mathbf{a}_x \delta^2 + 2\mathbf{b}_x \delta) t_k + (\mathbf{a}_x \delta^3 + \mathbf{b}_x \delta^2 + \mathbf{c}_x \delta)$$

- Zahtjevno za izračunavanje
 - Traži se rješenje za promjenu za k (Δ_k) i promjenu za $k+1$ (Δ_{k+1})
 - Nastavak proračuna sa početnim vrijednostima x_0 , Δ_0 , i Δ_1
 - Izračunati x_3 dodavanjem $x_0 + \Delta_0 + \Delta_1$

Metod podjele na podsegmente



Prije
podjele



Nakon
podjele

Rasterizacija Bézier splajna

```
public void spline(ControlPoint p0, ControlPoint p1,  
                  ControlPoint p2, ControlPoint p3, int pix) {  
    float len = ControlPoint.dist(p0,p1) + ControlPoint.dist(p1,p2)  
              + ControlPoint.dist(p2,p3);  
    float chord = ControlPoint.dist(p0,p3);  
    if (Math.abs(len - chord) < 0.25f) return;  
    fatPixel(pix, p0.x, p0.y);  
    ControlPoint p11 = ControlPoint.midpoint(p0, p1);  
    ControlPoint tmp = ControlPoint.midpoint(p1, p2);  
    ControlPoint p12 = ControlPoint.midpoint(p11, tmp);  
    ControlPoint p22 = ControlPoint.midpoint(p2, p3);  
    ControlPoint p21 = ControlPoint.midpoint(p22, tmp);  
    ControlPoint p20 = ControlPoint.midpoint(p12, p21);  
    spline(p20, p12, p11, p0, pix);  
    spline(p3, p22, p21, p20, pix);  
}
```

